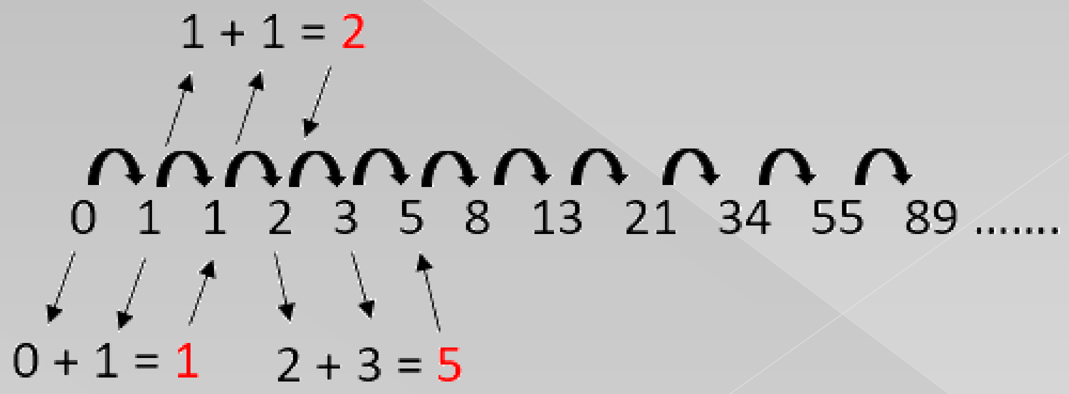
Ciąg Fibonacciego

Emilia Gałka

Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb naturalnych określony w następujący sposób:

Pierwszy wyraz jest równy 0, drugi jest równy 1, a każdy kolejny jest sumą dwóch poprzednich. Nazwę „ciąg Fibonacciego” spopularyzował w XIX w. Édouard Lucas. Zaliczanie zera do elementów ciągu Fibonacciego zależy od umowy – część autorów za pierwszy wyraz ciągu uważa liczbę 1.



Ciąg został po raz pierwszy omówiony w 1202 roku przez Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, w dziele ,,*Liber abaci*" jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się królików.

Treść zadania: *Ile par królików może spłodzić jedna para w ciągu roku, jeśli*

– każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca,

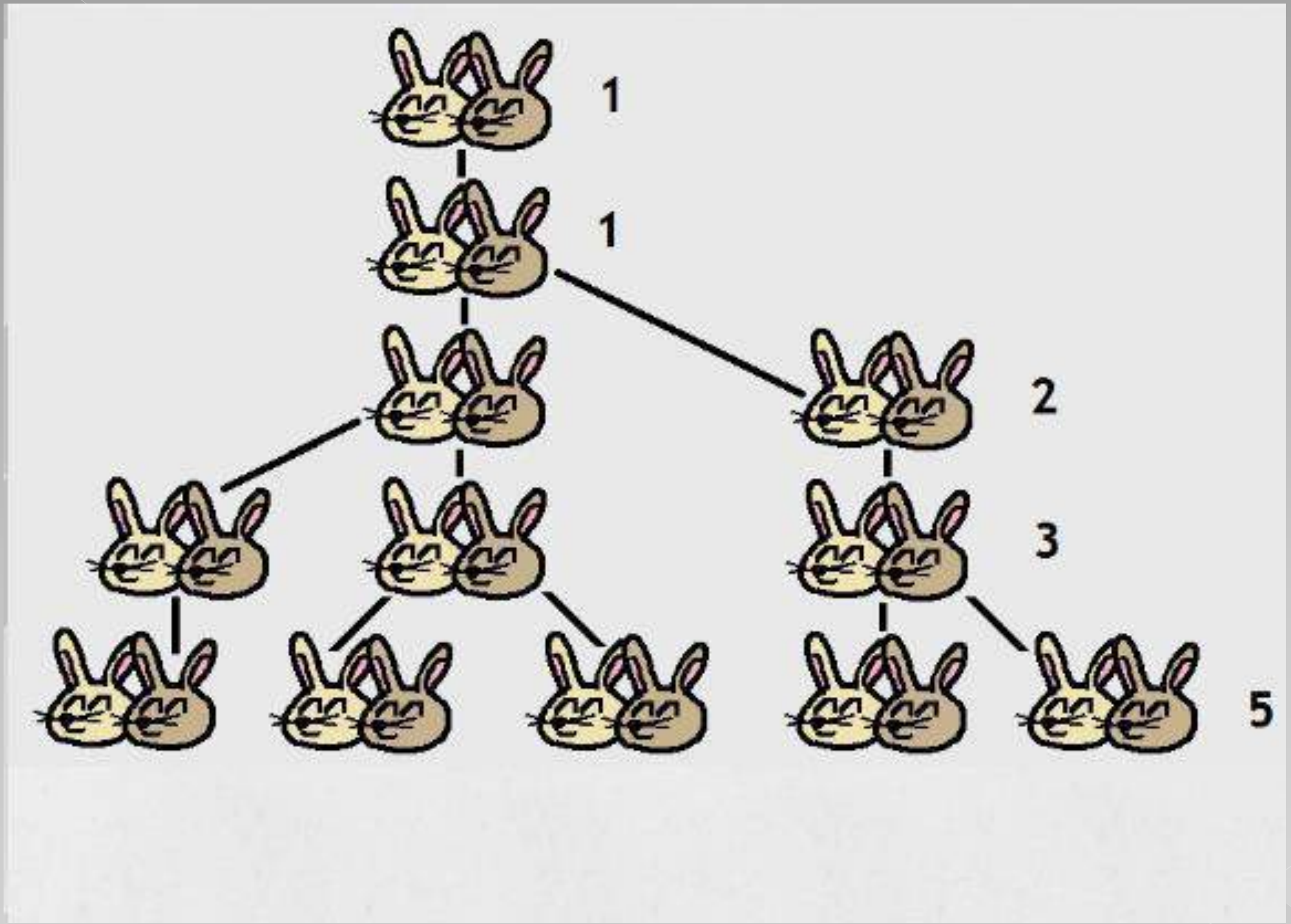
– para staje się płodną po miesiącu,

– króliki nie zdychają ?

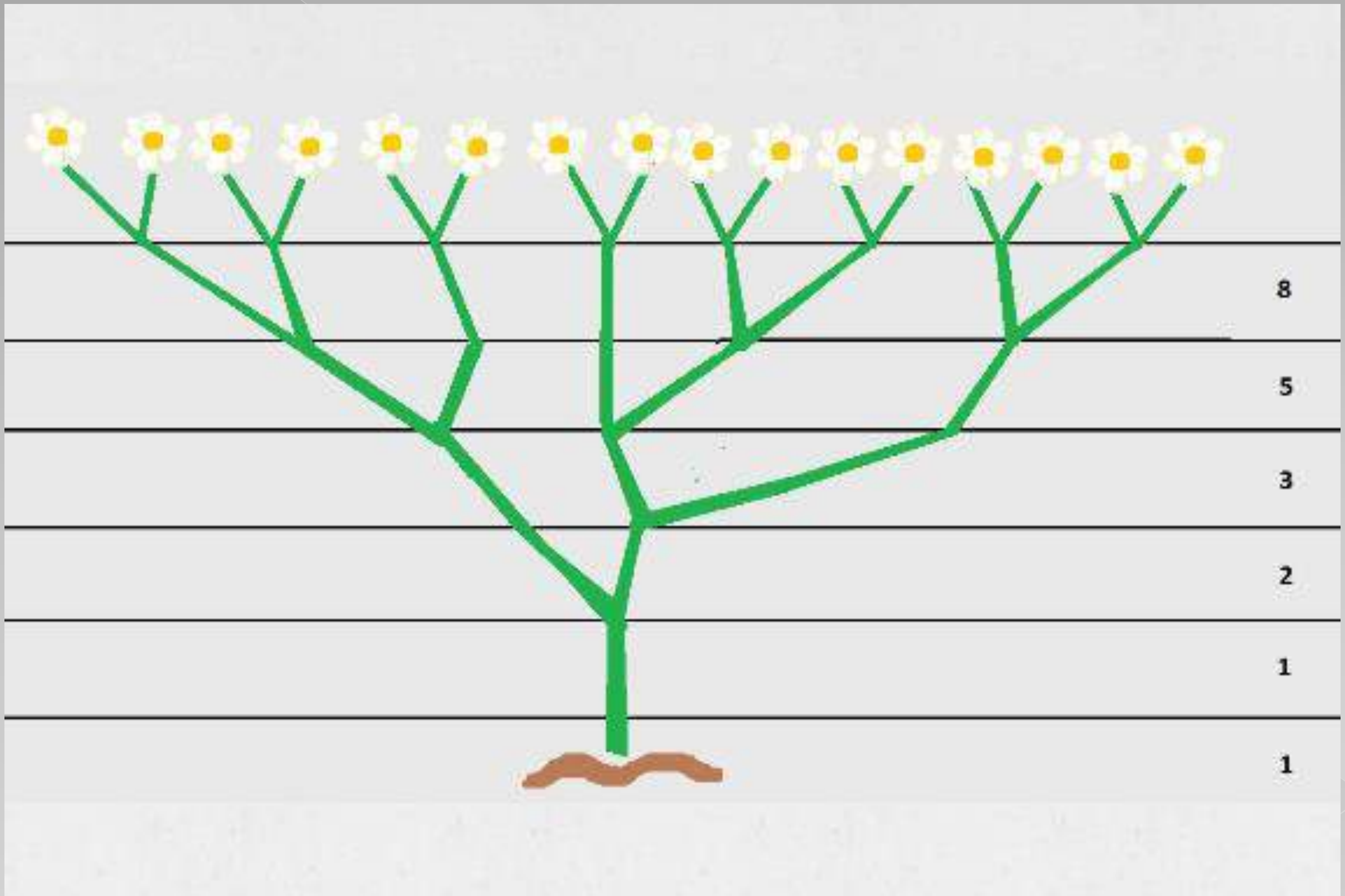
Rozwiązanie zadania

Pierwszy miesiąc: jedna para królików rodzi nową parę królików. Razem: **2** pary królików.
Drugi miesiąc: dwie pary królików plus nowa para królików. Razem: **3** pary królików.
Trzeci miesiąc: trzy pary królików plus 2 urodzone. Razem: **5** par królików.
Czwarty miesiąc: pięć par królików plus 3 urodzone. Razem: **8** par królików.
Piąty miesiąc: osiem par królików plus 5 urodzonych. Razem: **13** par królików. itd.

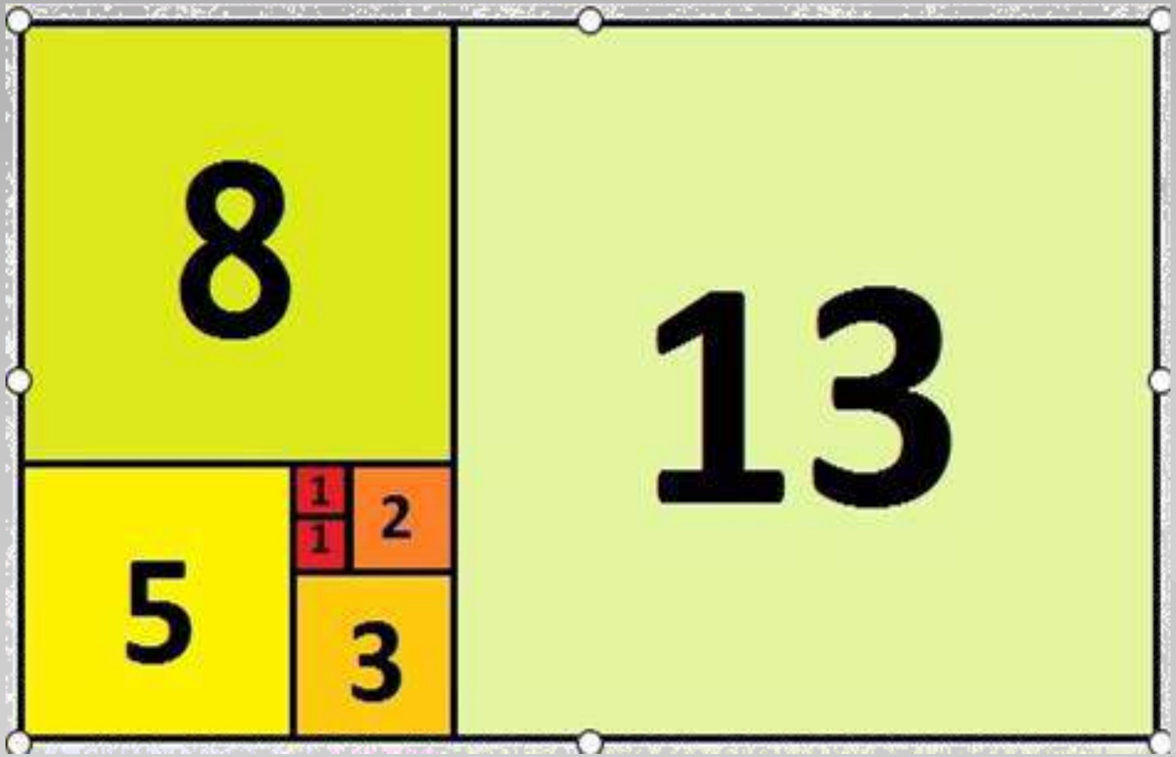
Kolejne liczby tworzą zatem kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego.


1
1
2
3
5

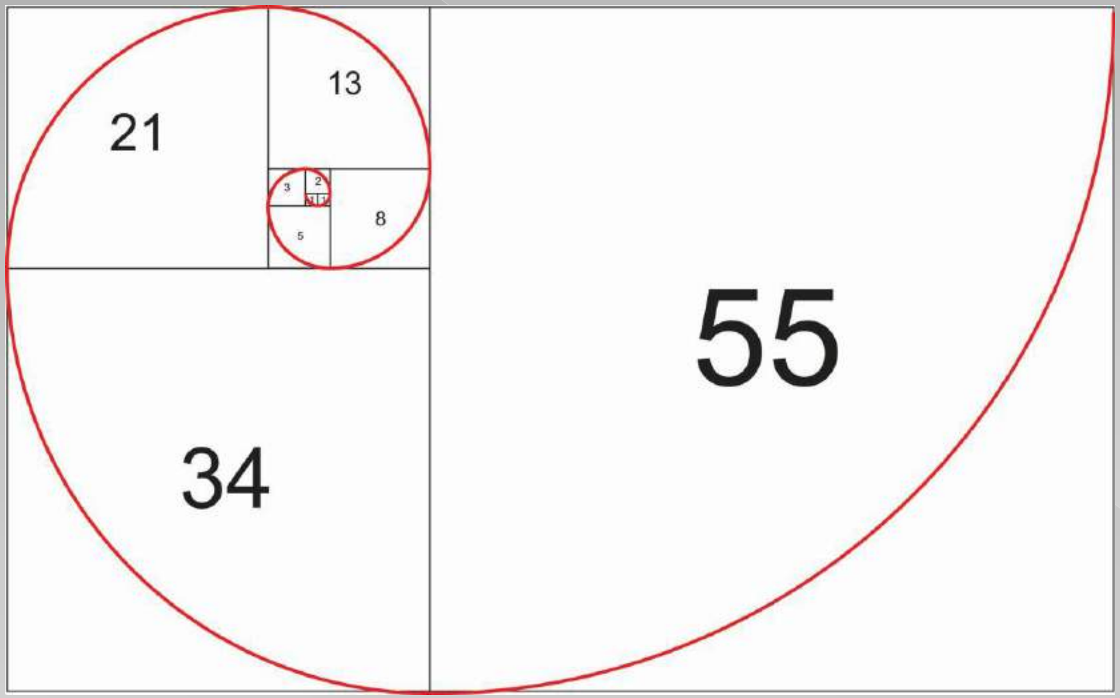
Ciąg Fibonacciego może być także obrazowany przez kwiaty wytwarzające pędy.



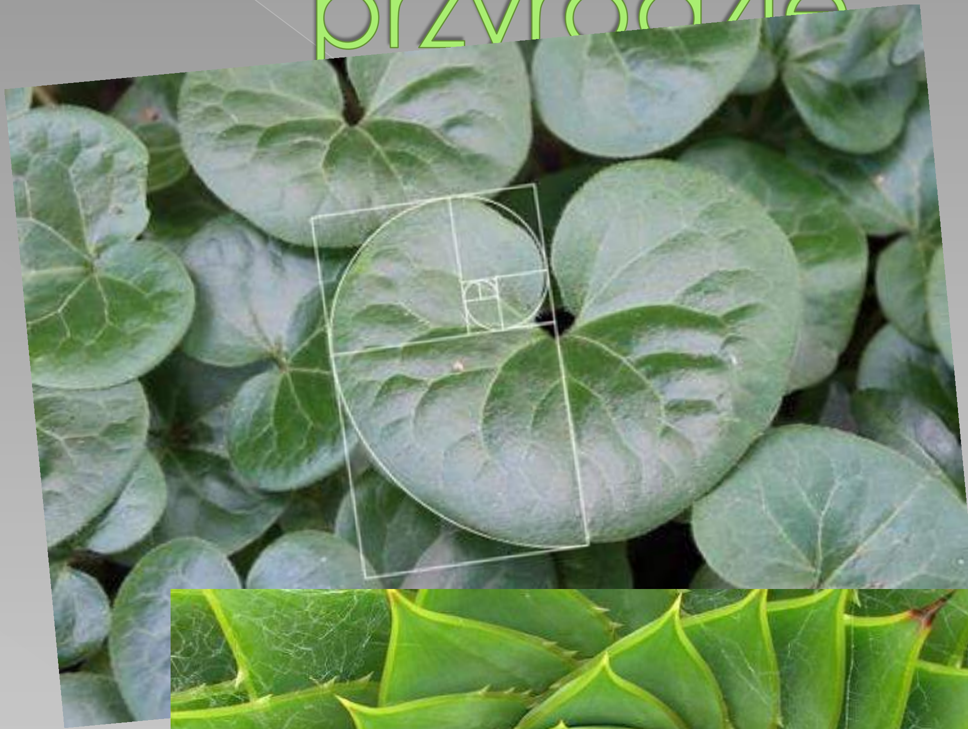
Ciąg można przedstawić również graficznie, gdzie kolejna liczba jest kwadratem przystającym do ścian poprzednich kwadratów.



Kiedy połączymy miejsca styczności zewnętrznych odcinków poszczególnych kwadratów, powstaje tzw. **złota spirala**, która jest bardzo często spotykana w przyrodzie.



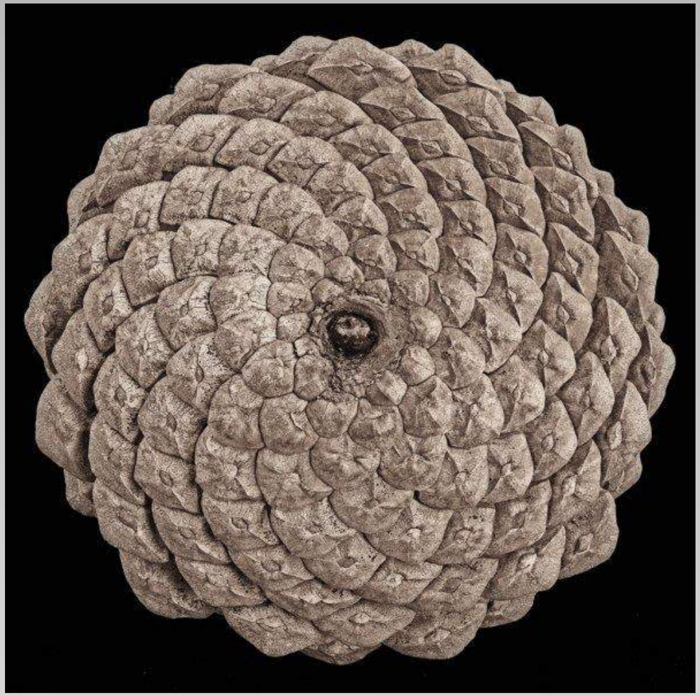
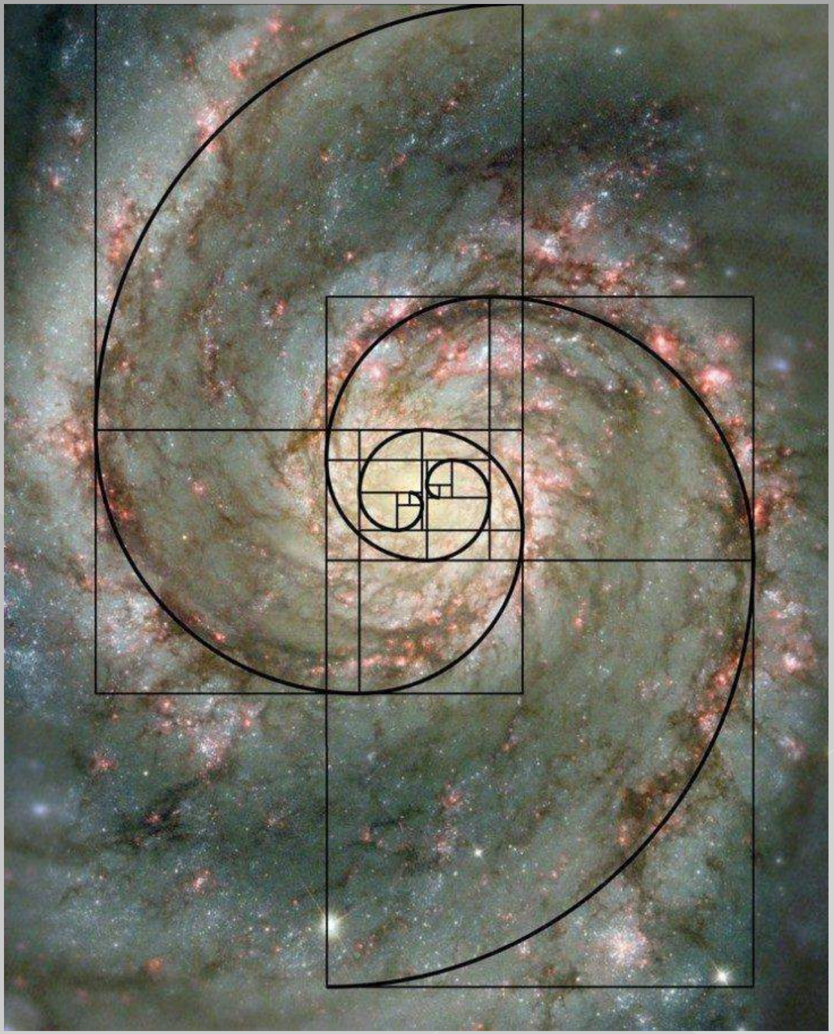
Złota spirala w przyrodzie



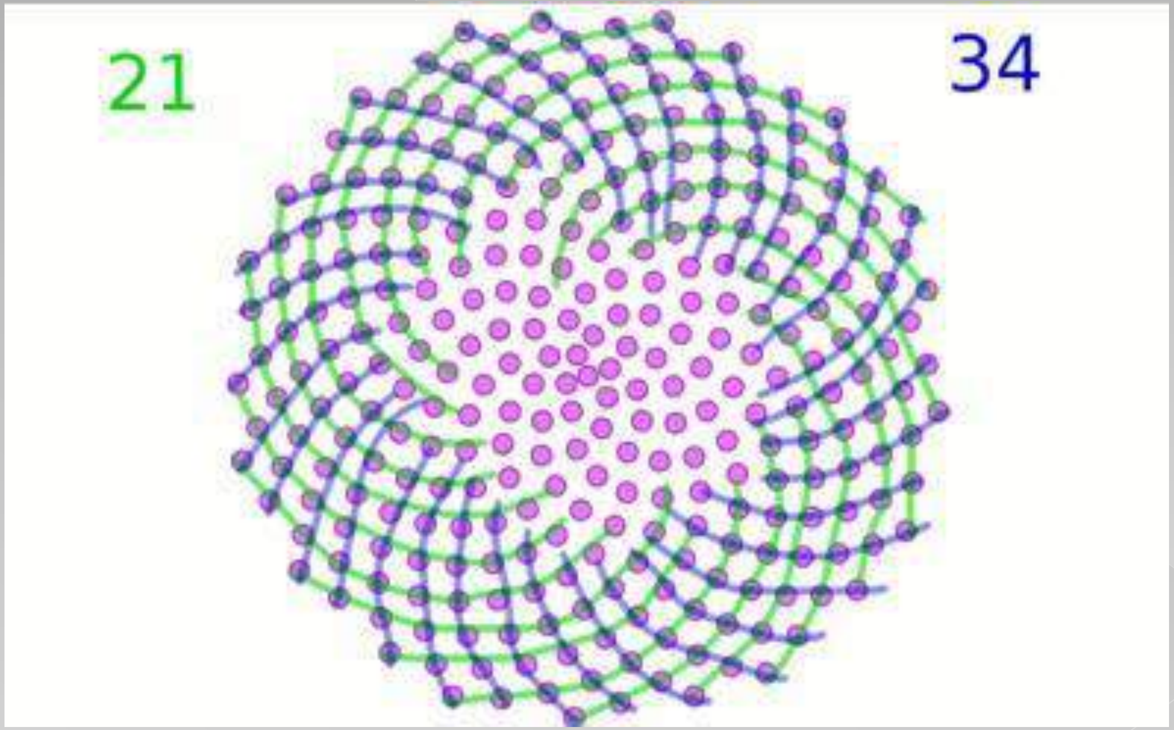
fot. źródła własne

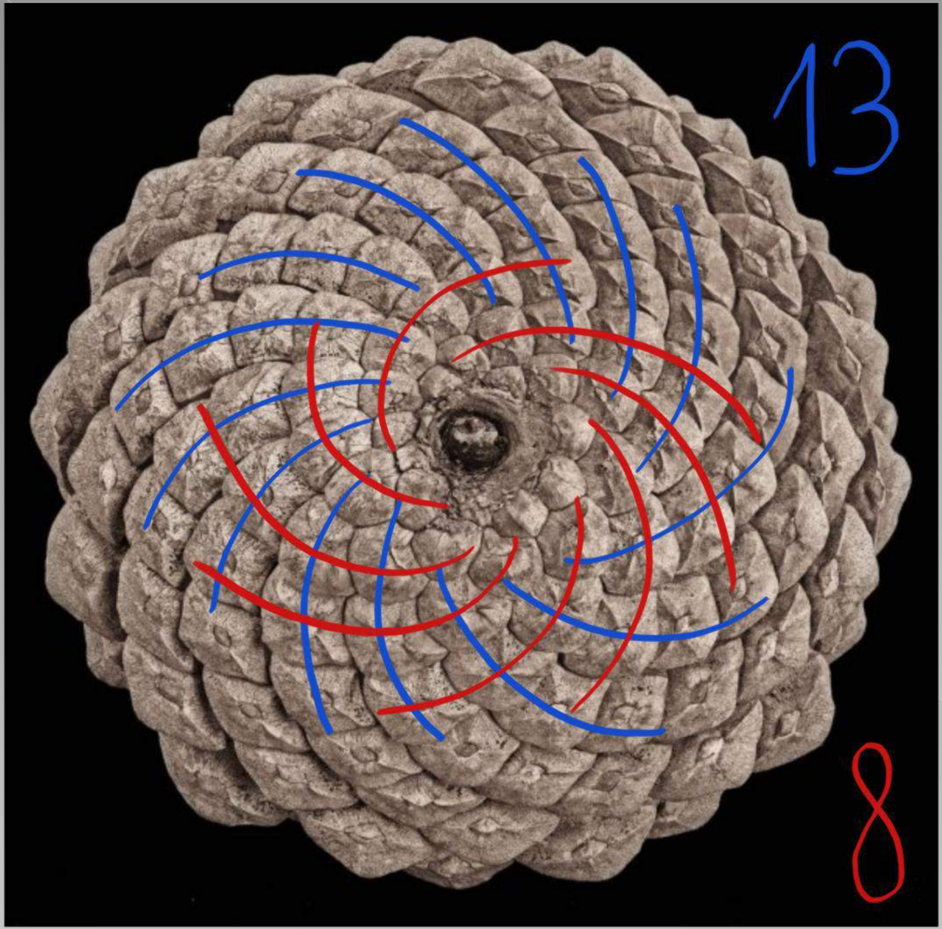

fot. źródła własne

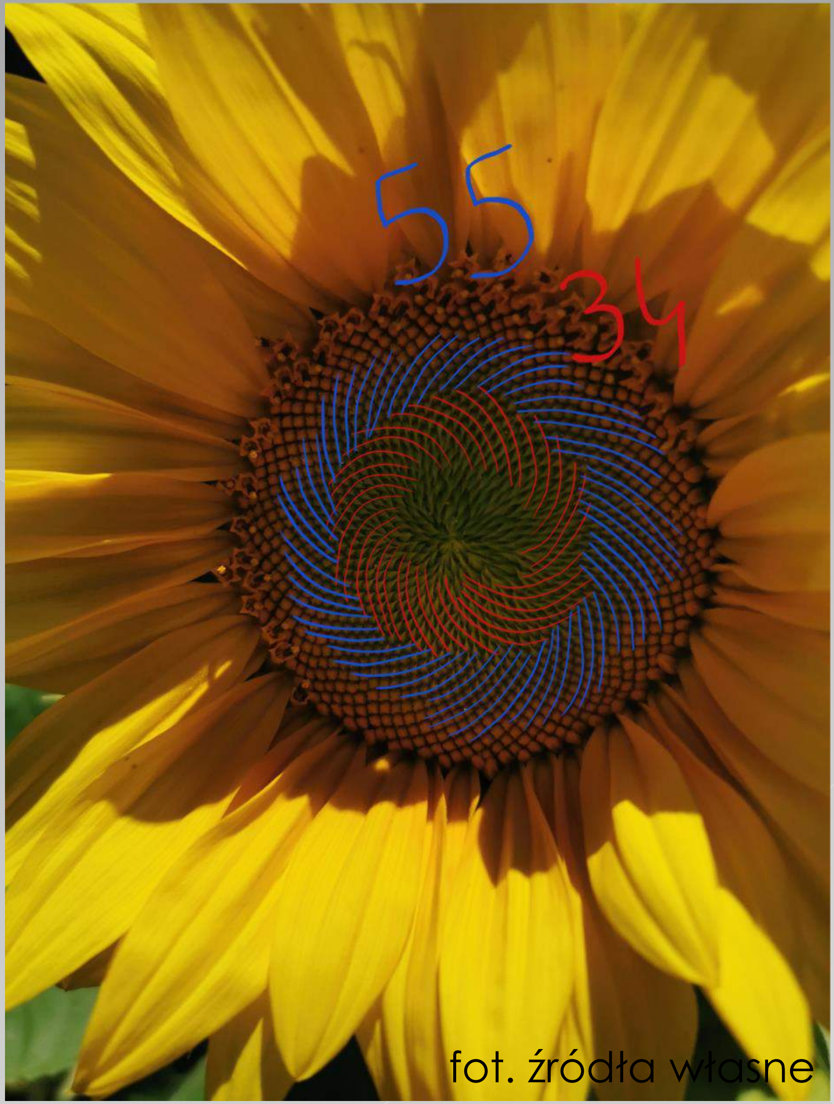

fot. źródła własne

Charakterystyczną cechą niektórych roślin jest także występowanie prawo i lewoskrętnych spirali. Gdy je policzymy, okaże się, że ich liczba odpowiada kolejnym liczbom ciągu Fibonacciego.




13
8


55
34
fot. źródła własne


8
13

21
34

Do właściwości ciągu można zaliczyć następującą własność. Jeżeli podzielimy dowolną liczbę ciągu przez jej poprzednik, za każdym razem otrzymany wynik wahający się w okolicach 1,618 – w miarę zwiększania się liczb iloraz zbliża się do tej wartości,

np.:

2 : 1 = **2**

3 : 2 = **1,5**

...

13 : 8 = **1,625**

21 : 13 = **1,615**

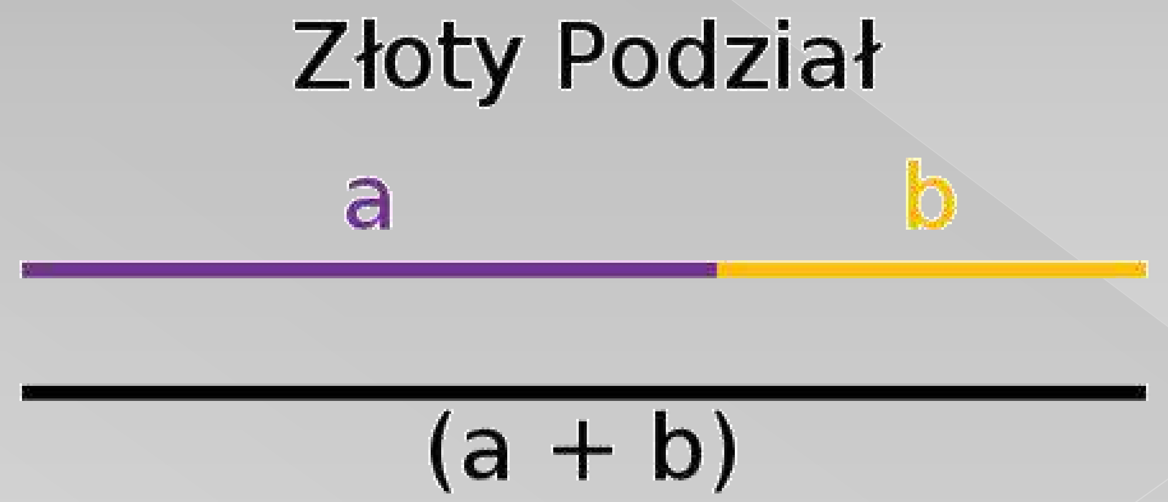
...

987 : 610 = **1,618**...

W ten sposób otrzymujemy liczbę fi: **φ**, która nosi nazwę **złotej liczby**. W przybliżeniu wynosi 1,618033988…

1,618

Złota liczba była znana już starożytnym Grekom.
Jest ona ściśle związana z tak zwanym złotym podziałem i złotą (boską) proporcją. Podział ten polega na takim podzieleniu odcinka na dwie części, aby stosunek długości dłuższego odcinka do długości krótszego odcinka był taki sam jak stosunek długości dłuższego odcinka do długości całego odcinka.



Wzory

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

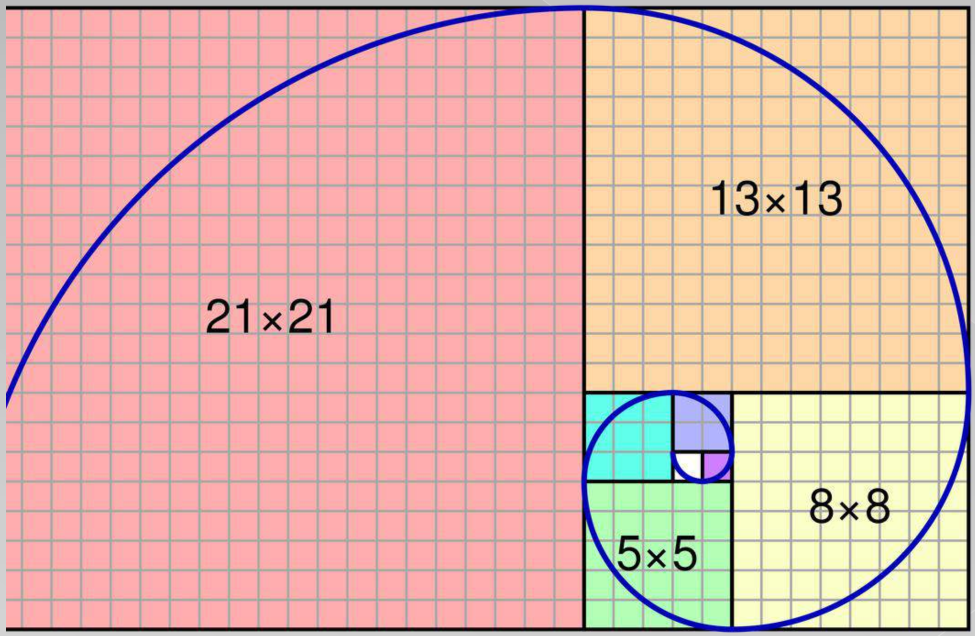
$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

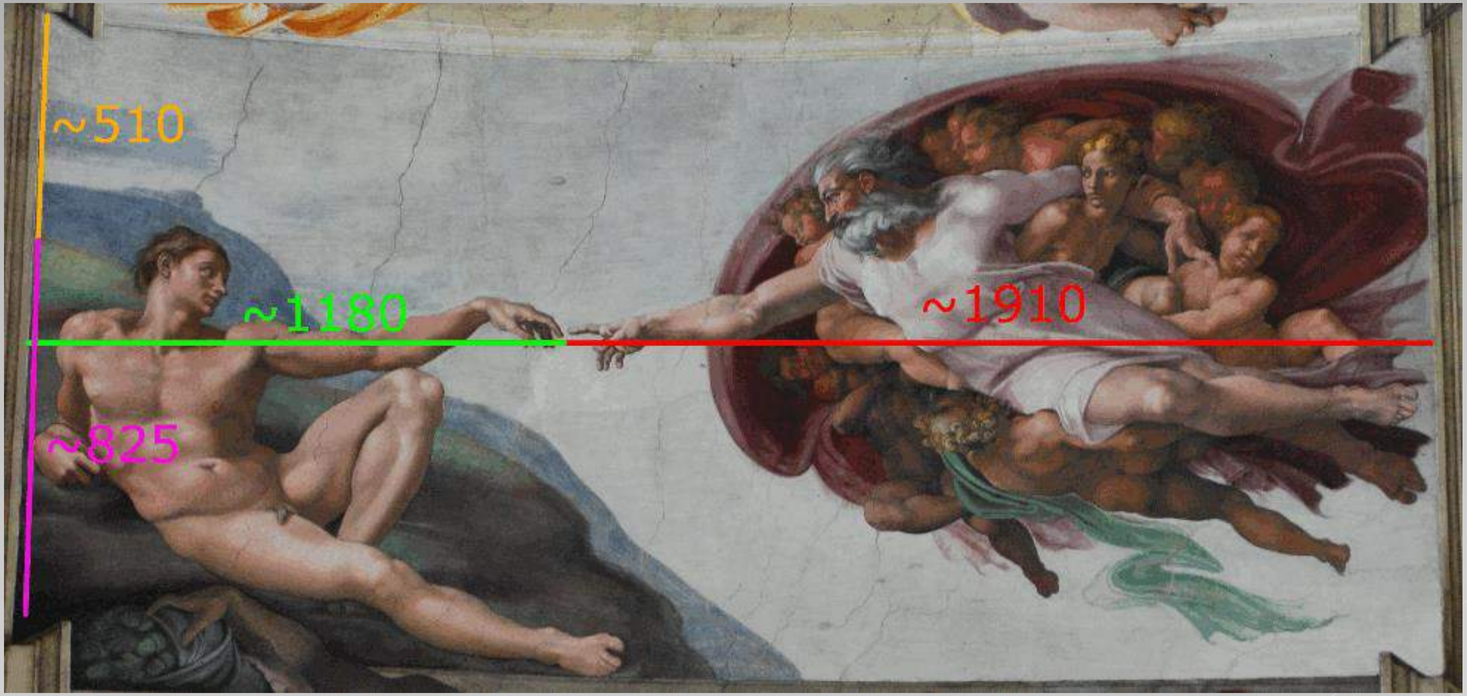
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

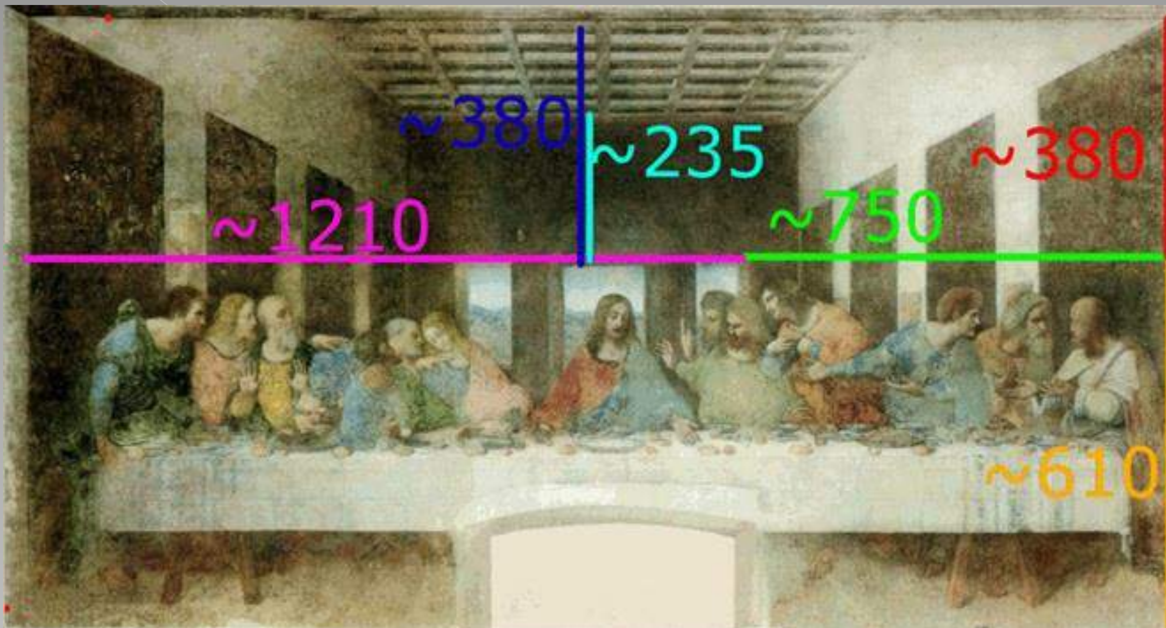
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

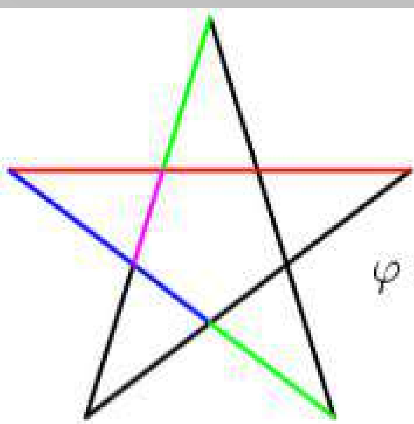
Liczba Fi ma to do siebie, że jeżeli podniesiemy ją do kwadratu, otrzymamy liczbę dokładnie o jeden większą. Natomiast jeżeli porównalibyśmy odwrotność Złotej Liczby do jej samej, otrzymamy Złotą liczbę pomniejszoną o jeden, czyli -0,618033988…



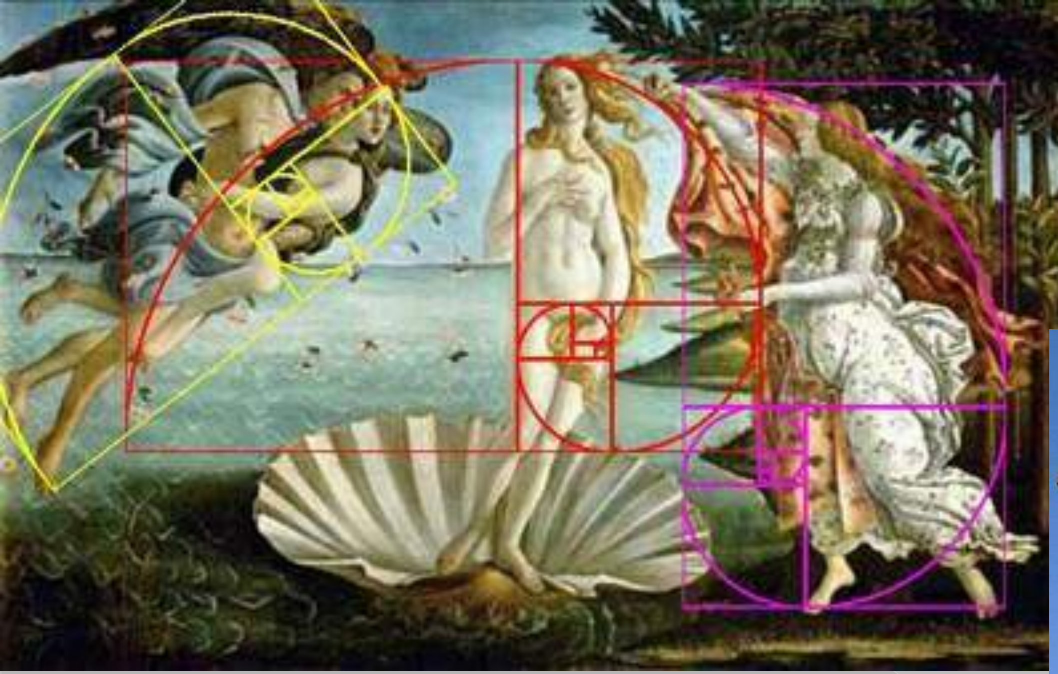
Znajduje ona zastosowanie w architekturze, malarstwie, muzyce, a nawet jest współcześnie wykorzystywana przy logach znanych firm.

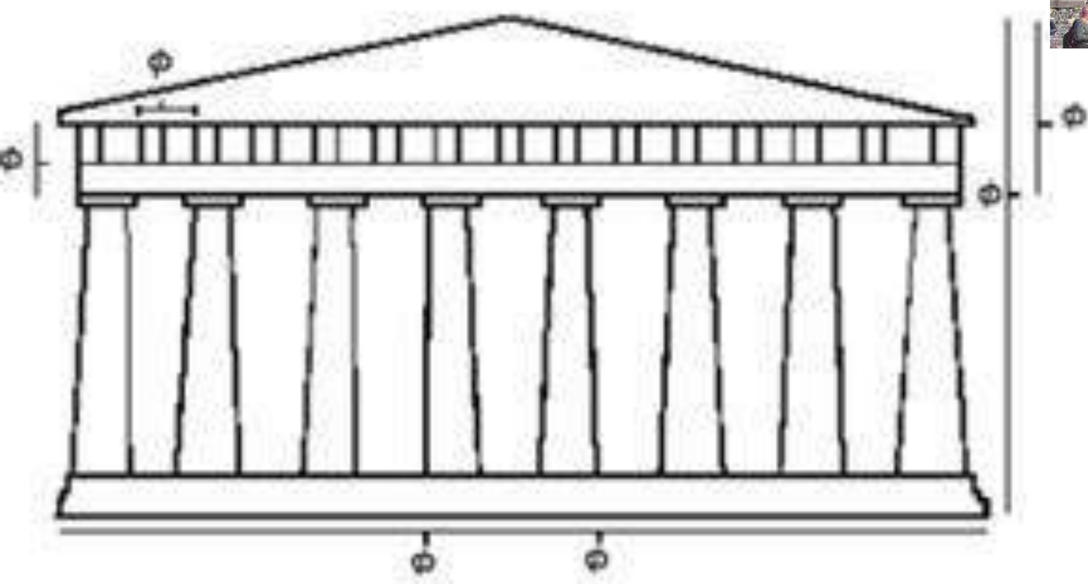


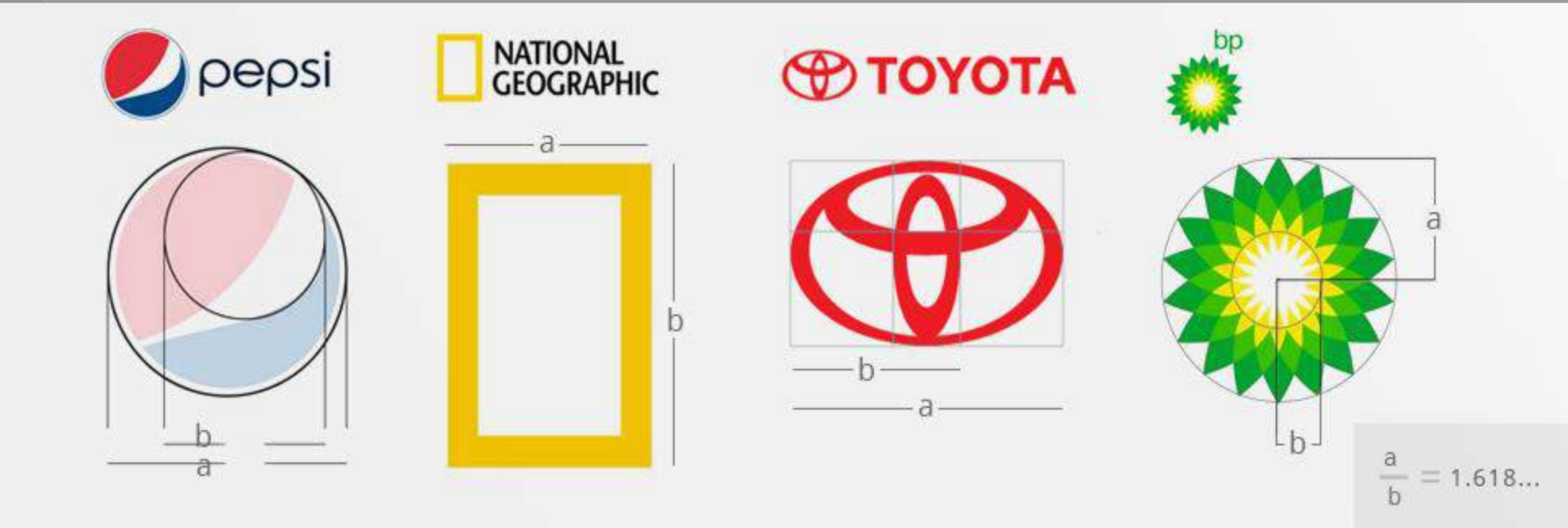


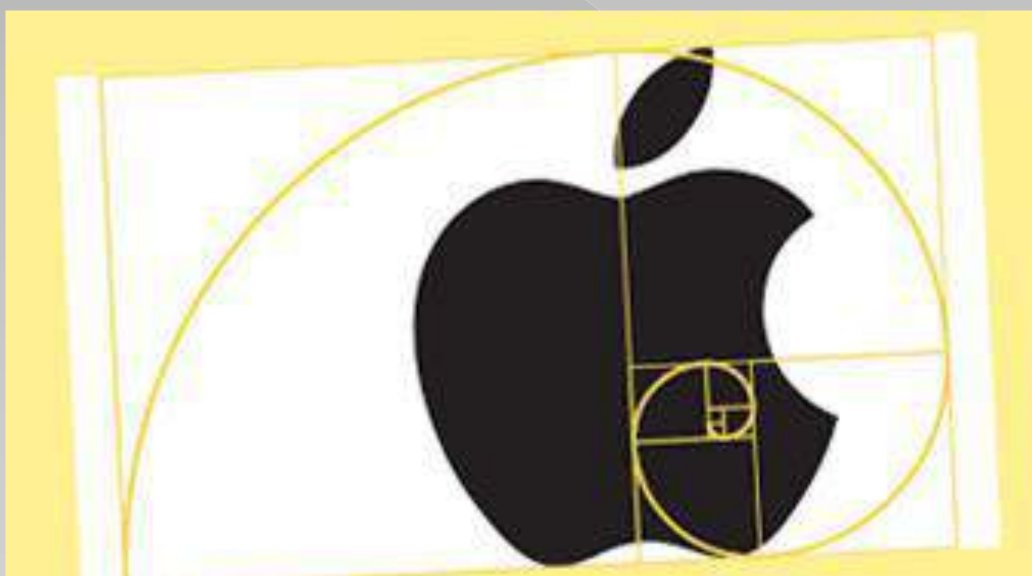


$$\varphi = \frac{\text{czerwony}}{\text{niebieski}} = \frac{\text{niebieski}}{\text{zielony}} = \frac{\text{zielony}}{\text{fioletowy}}$$




Φ
Φ
Φ
Φ
Φ
Φ

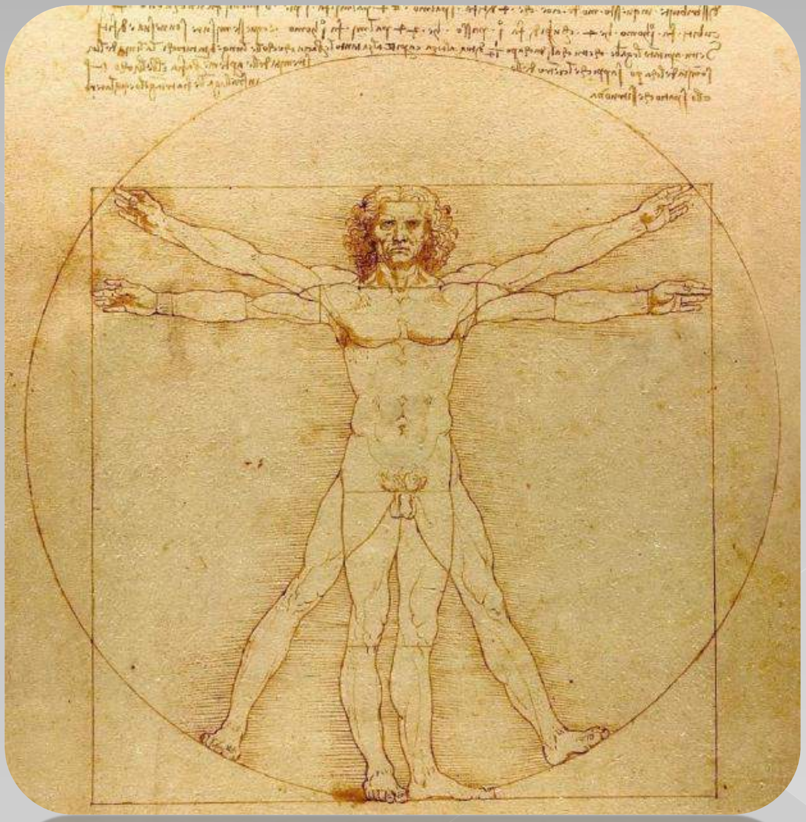

pepsi
NATIONAL GEOGRAPHIC
TOYOTA
bp
a
b
$\frac{a}{b} = 1.618...$



Złotą proporcję można również odnaleźć w ludzkim ciele. Proporcje idealnego ludzkiego ciała wynoszą:

- wzrost człowieka do odległości od stóp do pępka = **ϕ**
- odległość od koniuszków palców do łokci do odległości od łokcia do nadgarstka = **ϕ**
- odległość od ramion do czubka głowy do odległości od brody do czubka głowy = **ϕ**
- odległość od pępka do czubka głowy do odległości od ramion do czubka głowy = **ϕ**
- odległość od kolana do pępka do odległości od kolana do stopy = **ϕ**

- wysokość twarzy do jej szerokości = **ф**
- odległość od brwi do ust do długości nosa = **ф**
- wysokość twarzy od odległości od brwi do podbródka = **ф**
- szerokość ust do szerokości podstawy nosa = **ф**

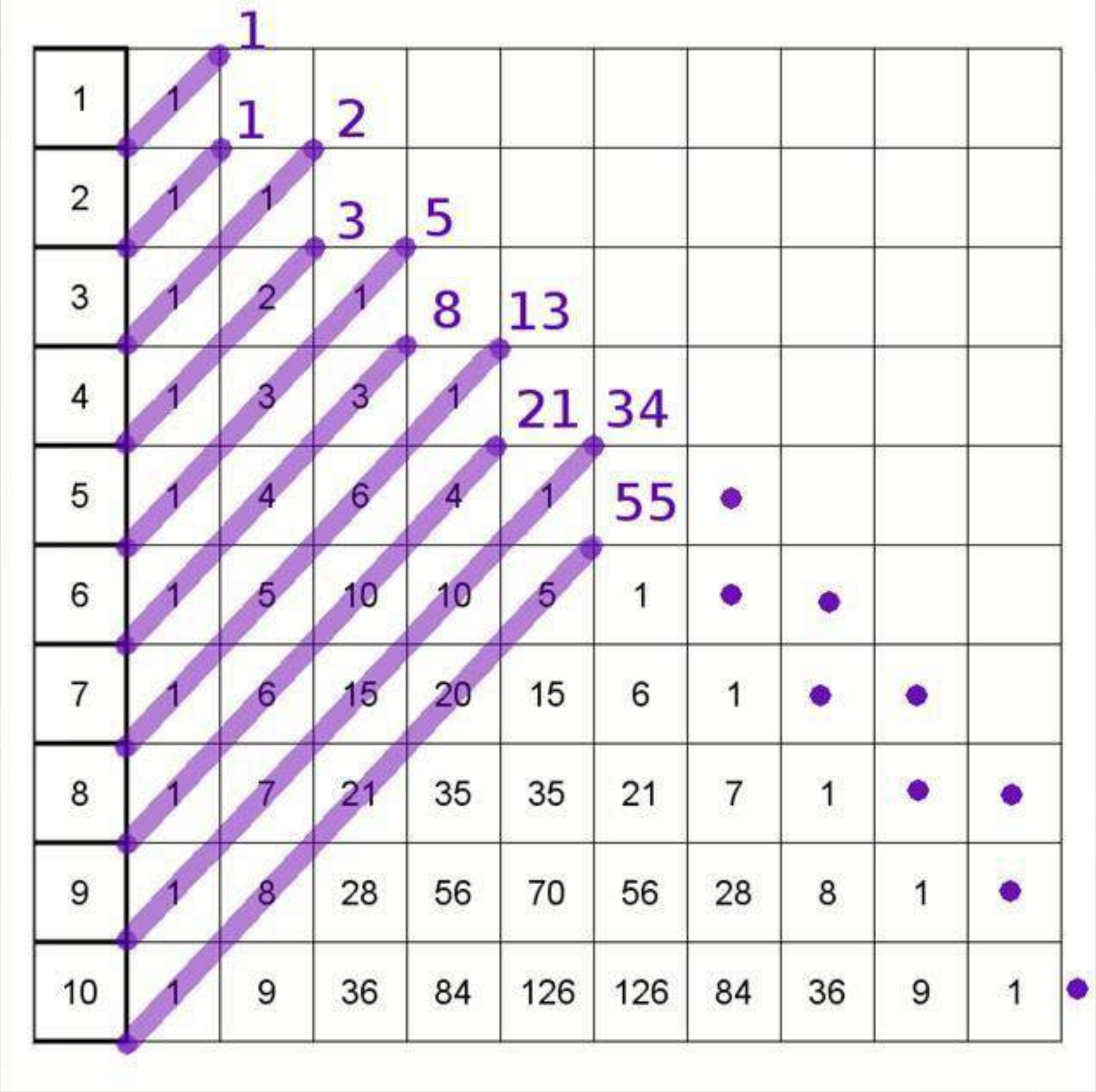


Wybrane własności ciągu

- Możemy wyznaczyć wartość elementu ciągu Fibonacciego znając tylko jego pozycje w ciągu. Wzór dla Ciągu Fibonacciego gdy f(0) = 1 i f(1) = 1

$$f(n) = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$$

Trójkąt Pascala



- Każda liczba całkowita większa od zera ma wielokrotność będącą liczbą ciągu Fibonacciego.

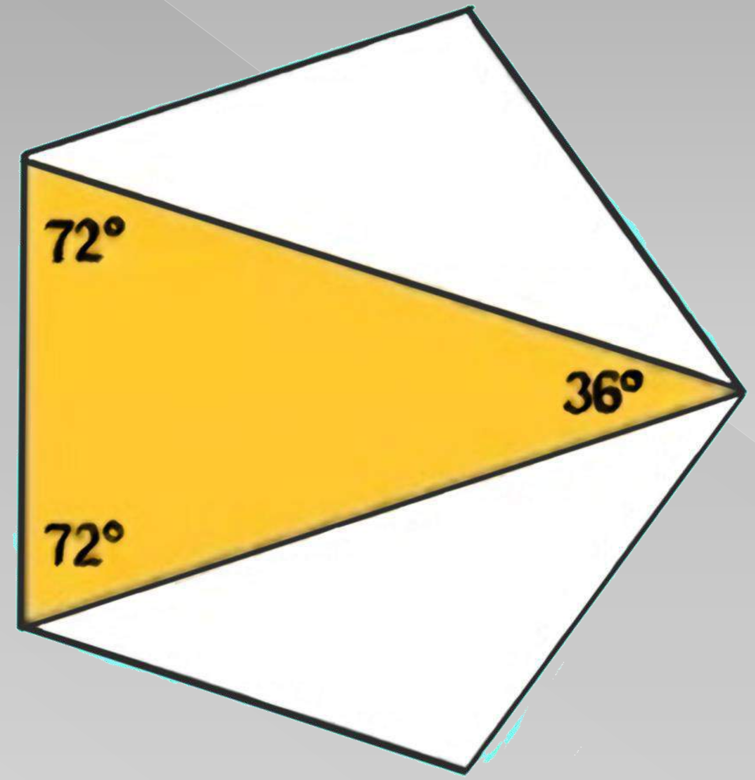
  np. W(7)= 0, 7, 14, **21**, 28, 35,…

- Co trzecia liczba Fibonacciego jest podzielna przez 2, co czwarta – przez 3.

  1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987…

- Jedynymi liczbami w całym ciągu Fibonacciego, będącymi kwadratami liczb całkowitych są 1 i 144.

- Rysując trójkąt w pięciokącie foremnym (o kątach 72°, 72°, 36°), otrzymamy tzw. „złoty trójkąt”. Stosunek długości ramienia do jego podstawy jest równy liczbie Fi.



Bibliografia

- www.zobaczycmatematyke.krk.pl
- www.edukator.pl
- www.matura-informatyka.pl
- www.math.edu.pl/liczby-fibonacciego
- pl.wikipedia.org
- matematykainnegowymiaru.pl